Münster.1930 № 33

Phil. Diss

Mathematik.

Über die analytischen Abbildungen von Kreiskörpern und Hartogsschen Bereichen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde
der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster (Westf.)

vorgelegt von

Helmut Welke
aus Bünde (Westf.).

1930

Mathematik.

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Januar 1930.

Dekan: Herr Prof. Dr. Wätjen.

Referent: Herr Prof. Dr. Behnke.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Über die analytischen Abbildungen von Kreiskörpern und Hartogsschen Bereichen.

Von

H. Welke in Münster (Westf.)*).

Einleitung.

In der Funktionentheorie von zwei komplexen Veränderlichen $w = u + iv$, $z = x + iy$ treten an Stelle der Kreise in der gewöhnlichen Funktionentheorie nicht nur die Hyperkugeln, sondern eine größere Klasse von vierdimensionalen Gebieten mit Kreissymmetrie. Vor allen Dingen sind es die Kreiskörper.

(D_1): Definition des Kreiskörpers. *Kreiskörper nennen wir einen Bereich des (w, z)-Raumes, der durch die Transformationen*

$$T_1: \quad \begin{aligned} w' - a &= (w - a)\, e^{i\vartheta}, \\ z' - b &= (z - b)\, e^{i\vartheta} \end{aligned} \qquad (\vartheta \text{ reell})$$

in sich übergeht, wo $w = a$, $z = b$ innerer Punkt ist. Er sei Mittelpunkt des Kreiskörpers genannt.

So sind die Konvergenzgebiete der Potenzreihen [1]) und die Indikatrizen der Carathéodoryschen Metriken [2]) in der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen Kreise, in der zweier Veränderlichen dagegen Kreiskörper.

Seit Poincaré [3]) weiß man:

Ein Bereich des (w, z)-Raumes läßt sich nicht auf jeden anderen durch analytische Transformationen

$$(1) \qquad w' = f_1(w, z), \qquad z' = f_2(w, z)$$

*) Seminar von Prof. Behnke.

[1]) Vgl. Behnke, Natürliche Grenzen, Hamburger Abhandl. **5**.

[2]) Vgl. Carathéodory, Geometrie bei analytischen Abbildungen, Hamburger Abhandl. **6**.

[3]) Vgl. Poincaré, Les fonctions analytiques de deux variables, Rendiconti di Palermo **23**, S. 185–220.

abbilden. Man hat in einer Reihe von Arbeiten versucht, näheres über die Abbildbarkeit von vierdimensionalen Gebieten auszusagen, ohne das Problem bisher umfassend lösen zu können. Als Beitrag zu diesen laufenden Untersuchungen ist die folgende Arbeit gedacht.

Es werden zunächst die eineindeutigen, analytischen und mittelpunktstreuen Abbildungen der Kreiskörper untersucht. Dabei bediene ich mich eines von Herrn Bergmann angegebenen Verfahrens[4]).

Herr Bergmann faßt alle Bereiche des (w, z)-Raumes, die man normiert (siehe § 1, D_1) aufeinander abbilden kann, zu einer Klasse zusammen. Mittels eines Verfahrens, das analog dem Dirichletschen Prinzip aufgebaut ist, kann Herr Bergmann jedem Bereich $\mathfrak{B}$ ein gegen normierte Abbildungen kovariantes Funktionenpaar zuordnen. Falls das Funktionenpaar eine eineindeutige analytische Abbildung von $\mathfrak{B}$ vermittelt, so ist der Bildbereich $\mathfrak{B}_R$ für jeden Bereich $\mathfrak{B}'$ derselben Abbildungsklasse derselbe. $\mathfrak{B}_R$ ist ein ausgezeichneter Bereich der Abbildungklasse. Herr Bergmann nennt ihn *Repräsentantenbereich.*

In § 1 habe ich die Ergebnisse von Herrn Bergmann angegeben, soweit sie in den folgenden Überlegungen gebraucht werden.

In § 2 zeige ich, daß die Kreiskörper Repräsentantenbereiche sind. (Die Normierung ist auf den Mittelpunkt des Kreisbereichs bezogen.) Daraus folgt unmittelbar, daß die Kreiskörper verschiedenen Abbildungsklassen angehören. Eine nicht normierte Abbildung kann man aber durch Einsetzen einer ganzen linearen Transformation in eine normierte Abbildung überführen. *Also sind Kreiskörper mittelpunktstreu nur affin auf Kreiskörper abzubilden.* Die affinen Transformationen der Kreiskörper sind aber schon eingehend von Herrn Blaschke und Herrn Carathéodory untersucht.

Zu demselben Ergebnis, nämlich daß die Kreiskörper ähnlich wie die Kreise der gewöhnlichen Funktionentheorie mittelpunktstreu nur affin aufeinander abzubilden sind, ist Herr Behnke durch Studium der kontinuierlichen Gruppen von Kreiskörpertransformationen ohne Benutzung der Bergmannschen Theorie gelangt[5]).

In § 3 untersuche ich die Abbildungen einer weiteren Klasse von Bereichen mit Kreissymmetrie. In seiner grundlegenden Arbeit in den Mathe-

---

[4]) Vgl. Bergmann, Über unendliche Hermitesche Formen, die einem Bereiche zugeordnet sind, Math. Zeitschr. **29** (1929), S. 640–677; Über die Existenz von Repräsentantenbereichen, Math. Annalen **102** (1930), S. 430–442; Über Hermitesche Formen, die zu einem Bereiche gehören, Berliner Sitzungsberichte 1927, S. 178–184.

[5]) Vgl. eine demnächst in den Hamburger Abhandlungen erscheinende Arbeit. Während der Drucklegung dieser Arbeit hat Herr Henri Cartan einen sehr eleganten Beweis desselben Satzes in den Comptes Rendus **190** (1930), S. 718–720 — vgl. auch S. 354–356 — veröffentlicht.

matischen Annalen[6]) hat Herr Hartogs die Konvergenzbereiche der Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu f_\nu(w)$ untersucht. Er gibt diese Bereiche in der Form an:

$$|z| = R(w).$$

Diese Bereiche sind offenbar invariant gegenüber den Transformationen

$$T_2: \quad \begin{aligned} w' &= w, \\ z' - a &= (z - a)\, e^{i\vartheta} \end{aligned} \qquad (\vartheta \text{ reell}).$$

(D_2): Definition eines Hartogsschen Bereichs. *Einen Bereich, der invariant ist gegenüber den Transformationen T_2, nenne ich einen Hartogsschen Bereich. (Die analytische Ebene $z = a$ des (w, z)-Raumes sei Symmetrieebene des Hartogsschen Bereichs genannt.)*

Ich zeige in § 3, daß Hartogssche Bereiche nur durch die Transformationen

$$L: \quad \begin{aligned} z' &= z \cdot g_1(w), \\ w' &= g_2(w) \end{aligned}$$

normiert abgebildet werden können.

(Die Normierung ist bezogen auf einen beliebigen Punkt der Symmetrieebene, den ich als Mittelpunkt meines Koordinatensystems gewählt habe.)

Jeder Hartogssche Bereich, der zu gleicher Zeit ein Kreiskörper ist, ist ein Reinhardtscher Kreiskörper.

(D_3): Definition des Reinhardtschen Kreiskörpers. *Ein Reinhardtscher Kreiskörper ist dadurch charakterisiert, daß er durch die Transformationen*

$$T_3: \quad \begin{aligned} w' - a &= (w - a)\, e^{i\vartheta}, \\ z' - b &= (z - b)\, e^{i\varphi} \end{aligned} \qquad (\vartheta, \varphi \text{ reell})$$

in sich übergeht. ($w = a$, $z = b$ Mittelpunkt.)

Herr Bergmann hat schon gezeigt, daß die Reinhardtschen Kreisbereiche Repräsentantenbereiche sind[7]). Ich kann zeigen: Nicht in jeder Abbildungsklasse, in der ein Hartogsscher Bereich liegt (Normierung auf einen Punkt der Symmetrieebene bezogen), liegt auch ein Kreisbereich. Es gibt also noch eine weitere Klasse von Repräsentantenbereichen. Nicht jeder Bereich läßt sich auf einen Kreisbereich abbilden.

Es bleibt natürlich offen, welche Abbildungsklassen des (w, z)-Raumes, die wir durch die Repräsentantenbereiche charakterisiert haben, es sonst

---

[6]) Vgl. Hartogs, Über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen, Math. Annalen 62 (1906), S. 1–88.

[7]) Vgl. Anm. [4]).

noch geben mag. Hier liegt eine wesentliche Schwierigkeit des Bergmannschen Ansatzes. Überlegt man sich nämlich das Analoge in der Theorie einer komplexen Veränderlichen, so kann man leicht zeigen, daß der Kreis Repräsentantenbereich ist. Daß er der einzige Repräsentantenbereich ist, ist lediglich im Rahmen dieses Ansatzes bisher noch nicht gezeigt. Erst wenn ein vollständiges System von Repräsentantenbereichen gefunden ist, kann man das Abbildungsproblem des (w, z)-Raumes als gelöst betrachten.

Bezeichnungen. In den folgenden Untersuchungen werden mit Herrn Bergmann nur „ganz im Endlichen gelegene, einfach zusammenhängende, schlichte, von stückweise regulären, doppelpunktslosen, dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten berandete Bereiche $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$, ... des (w, z)-Raumes betrachtet".

Unter $\int\limits_{\mathfrak{B}} f(w,z)\,\overline{f(w,z)}\,d\omega_{w,z}$ sei das uneigentliche Integral $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{B}_n} f(w,z)\,\overline{f(w,z)}\,d\omega_{wz}$ verstanden, wo $\mathfrak{B}_n$ eine Folge ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegener Bereiche, die gegen $\mathfrak{B}$ konvergieren, ist.

$d\omega_{w\,z}$ ist eine Abkürzung für $dw\,d\bar{w}\,dz\,d\bar{z}$. $R(w) - w = u + iv$ — bedeute eine reelle Funktion $R(u, v)$ der reellen Veränderlichen u und v. $\Delta_w R(w)$ sei als Abkürzung für $\frac{\partial^2 R(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 R(u,v)}{\partial v^2}$ gesetzt.

Unter Transformationen (Abbildungen) T, L, ... wollen wir immer nur analytische Transformationen verstehen, auch wenn es nicht ausdrücklich gesagt ist.

§ 1.

Bericht über die Bergmannschen Arbeiten.

Die Ergebnisse der in der Einleitung erwähnten Arbeiten des Herrn Bergmann, soweit sie in meinen Untersuchungen gebraucht werden, möchte ich zunächst kurz in den folgenden Sätzen und Definitionen zusammenfassen [8]).

Satz 1. *Es gibt jeweils genau eine Funktion* $u_{\mathfrak{B}}^1$, $u_{\mathfrak{B}}^2$ *oder* $u_{\mathfrak{B}}^3$, *die das Integral*

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} f(w,z)\,\overline{f(w,z)}\,d\omega_{w,z} \tag{2}$$

zum Minimum macht, wobei zur Konkurrenz alle Funktionen zugelassen sind, die im Innern von $\mathfrak{B}$ *regulär sind und normiert sind durch*

$$N^1\colon\quad f(0,0) = 0;\quad f'_w(0,0) = 1;\quad f'_z(0,0) = 0$$

[8]) Siehe auch eine demnächst erscheinende Arbeit des Verfassers, die einen vereinfachten Beweis des Satzes 1 bringt.

oder

$$N^2\colon\quad f(0,0)=0;\quad f'_w(0,0)=0;\quad f'_z(0,0)=1$$

oder

$$N^3\colon\quad f(0,0)=1.$$

Wir führen zunächst mit Herrn Bergmann folgenden Begriff ein.

(D_4): Definition der Abbildungsklassen. *Zwei Bereiche* $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{B}'$ *des* (w,z)*-Raumes gehören zur selben Abbildungsklasse, falls sie normiert aufeinander abzubilden sind. Normiert heißt eine eineindeutige Abbildung eines Bereiches* $\mathfrak{B}$ *durch ein in* $\mathfrak{B}$ *analytisches Funktionenpaar*:

$$(3)\qquad \begin{matrix} w'=f_1(w,z) \\ z'=f_2(w,z) \end{matrix} \quad \textit{mit} \quad \begin{matrix} f_1(0,0)=0;\ f'_{1w}(0,0)=1;\ f'_{1z}(0,0)=0; \\ f_2(0,0)=0;\ f'_{2w}(0,0)=0;\ f'_{2z}(0,0)=1. \end{matrix}$$

Mit Hilfe der Minimalfunktionen des Satzes 1 können wir jetzt zu jedem Gebiet $\mathfrak{B}$ ein Funktionenpaar angeben, das charakteristisch für die Abbildungsklasse ist, zu der $\mathfrak{B}$ gehört.

Satz 2. *Das Funktionenpaar*

$$(4)\qquad \tilde{w}_{\mathfrak{B}}=\frac{u^1(w,z)}{u^3(w,z)},\qquad \tilde{z}_{\mathfrak{B}}=\frac{u^2(w,z)}{u^3(w,z)}$$

ist kovariant gegen normierte Abbildungen.

(4) definiert eine in der Umgebung des Normierungspunktes eineindeutige analytische Abbildung.

Unter „kovariant" verstehen wir:

$\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ mögen derselben Abbildungsklasse angehören. Die Abbildung sei gegeben durch (3). Dann ist.

$$\tilde{w}_{\mathfrak{B}}(w,z)=\tilde{w}_{\mathfrak{B}^*}(f_1(w,z),f_2(w,z)),$$
$$\tilde{z}_{\mathfrak{B}}(w,z)=\tilde{z}_{\mathfrak{B}^*}(f_1(w,z),f_2(w,z)).$$

Denn aus dem in Satz 1 angegebenen Minimumprinzip folgt direkt

$$u^1_{\mathfrak{B}}(w,z)=u^1_{\mathfrak{B}^*}(f_1(w,z),f_2(w,z))\cdot F(w,z),$$

wo $F(w,z)$ die Funktionaldeterminante von (3) ist.

Die Bedeutung des Kovariantenpaares (4) ergibt sich aus

(D_5): Definition des Bergmannschen Repräsentantenbereichs. *Einen Bereich, bei dem sich das Kovariantenpaar auf*

$$(5)\qquad \tilde{w}\equiv w,\qquad \tilde{z}\equiv z$$

reduziert, nennen wir Repräsentantenbereich.

Aus Satz 2 folgt: Wenn das Kovariantenpaar (4) in ganz $\mathfrak{B}$ regulär ist (u^3 könnte Null werden) und $\mathfrak{B}$ eineindeutig auf einen Bereich $\mathfrak{B}_R$ abbildet, so ist $\mathfrak{B}_R$ ein Repräsentantenbereich. Nicht nur $\mathfrak{B}$, sondern alle

Bereiche $\mathfrak{B}'$ der Abbildungsklasse von $\mathfrak{B}$ werden durch ihr Funktionenpaar $(\tilde{w}, \tilde{z})$ (w, z) auf $\mathfrak{B}_\mathfrak{R}$ abgebildet. $\mathfrak{B}_\mathfrak{R}$ ist ein ausgezeichneter Bereich der Abbildungsklasse, der „Repräsentant" dieser Klasse[9]).

Bei den entsprechenden Überlegungen in der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen findet man, daß Repräsentantenbereiche die Kreise um den Nullpunkt sind. (Daß zwei Kreise mit verschiedenem Radius Repräsentantenbereiche sind, liegt an der Normierung: $f'(0) = 1$.)

§ 2.

Über die Abbildungen von Kreiskörpern.

In diesem Paragraphen wollen wir nachweisen, daß Kreiskörper Repräsentantenbereiche sind. Dazu brauchen wir

Satz 3. *Jede Funktion, die in einem Kreiskörper $\mathfrak{K}$ regulär ist, läßt sich darstellen in der Form einer Diagonalenreihe*

$$f(w, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{l} a_{m, l-m} w^m \cdot z^{l-m} \right\}, \tag{6}$$

die in jedem inneren Teilbereich von $\mathfrak{K}$ gleichmäßig konvergiert.

Der Konvergenzbereich einer Diagonalenreihe einer in $(0, 0)$ analytischen Funktion $f(w, z)$ ist der Kreiskörper $\mathfrak{K}_f$, der von jeder analytischen Ebene durch $(0, 0)$ E: $s = \frac{w}{z} = \text{konst.}$ in einem Kreis, der die Entfernung des nächsten singulären Punktes in E als Radius hat, geschnitten wird. Die Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem inneren Punkte und deshalb nach dem Heine-Borelschen Theorem auch gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{K}_f$ [10]).

Da $f(w, z)$ regulär ist in $\mathfrak{K}$, liegt kein Punkt von $\mathfrak{K}$ außerhalb des dazu konzentrischen $\mathfrak{K}_f$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

---

[9]) Es ist bis jetzt noch nicht gelungen, den Beweis zu führen, daß das Kovariantenpaar (4) $\mathfrak{B}$ immer eineindeutig auf ein schlichtes Gebiet $\mathfrak{B}_\mathfrak{R}$ abbildet. Dazu müßte gezeigt werden, daß $\frac{\partial(\tilde{w}, \tilde{z})}{\partial(w, z)} \neq 0$ und $u^3(w, z) \neq 0$ in ganz $\mathfrak{B}$ ist. Herr Bergmann bittet mich mitzuteilen, daß man diese Schwierigkeit umgehen könnte, falls man nichtschlichte Bereiche zur Konkurrenz zuläßt. (In der Arbeit Math. Annalen **102**, S. 434 hat Herr Bergmann das durch den Satz angedeutet: Die Repräsentantenbereiche brauchen natürlich im allgemeinen nicht schlicht zu sein.) Doch wird es schwierig sein, eine derartige Betrachtung durchzuführen, da bis jetzt wenig über die Existenz von analytischen Funktionen zweier komplexer Veränderlichen auf nicht-schlichten Gebieten bekannt ist, und weil im Vierdimensionalen die möglichen Verzweigungen topologisch nicht einfach zu behandeln sein werden.

[10]) Vgl. Anm. [1]).

Satz 4. *Die Kreiskörper sind Bergmannsche Repräsentantenbereiche. Die Bergmannschen Minimalfunktionen eines Kreiskörpers* $\mathfrak{K}$, *bei der die Normierungen auf den Mittelpunkt des Kreiskörpers bezogen sind, lauten*

$$u^1 \equiv w, \quad u^2 \equiv z \quad \text{und} \quad u^3 \equiv 1.$$

Zum Beweise zerlegen wir $\mathfrak{K}$ in drei Teile:

1. Teil. Ein Dizylinder $\mathfrak{D}$: $|w| \leqq d$; $|z| \leqq d$, der ganz im Innern von $\mathfrak{K}$ liegt.

2. Teil. Der Kreiskörpersektor $\mathfrak{S}$: $\left|\frac{w}{z}\right| \leqq 1$; $|z| \geqq d$. $\mathfrak{S}$ kann man in der Form $|z| \leqq R(s)$ schreiben. $s = \frac{w}{z}$.

3. Teil. Der Kreiskörpersektor $\mathfrak{T}$ darstellbar als $|w| \leqq R'(t)$; $t = \frac{w}{z}$, wo $|t| \leqq 1$ und $|w| \geqq d$ ist[11]).

Wir lösen die drei Bergmannschen Minimumaufgaben, die sich durch die Normierungen N^1, N^2 und N^3 unterscheiden, jeweils für die drei Teilbereiche, wobei zur Konkurrenz nur Funktionen zugelassen sind, die in ganz $\mathfrak{K}$ regulär sind.

Der Dizylinder ist ein Reinhardtscher Kreisbereich. Die Minimumaufgaben ergeben nach Bergmann:

$$u^1 \equiv w; \quad u^2 \equiv z \quad \text{und} \quad u^3 \equiv 1.$$

Da alle drei Funktionen in ganz $\mathfrak{K}$ regulär sind, sind sie auch Lösungen des Minimumproblems im Dizylinder, wenn zur Konkurrenz nur die in $\mathfrak{K}$ regulären Funktionen zugelassen sind.

Zur Lösung der Minimumaufgabe für $\mathfrak{S}$ stellen wir die in $\mathfrak{K}$ regulären und entsprechend den einzelnen Problemen normierten $f(w, z)$ als Diagonalenreihen dar.

$$f(w, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{l} a_{l\,l-\nu} w^{\nu} z^{l-\nu} \right\}.$$

Da $|z| \leqq d > 0$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} z^l \left\{ \sum_{\nu=0}^{l} a_{l\,l-\nu} s^{\nu} \right\} = \sum_{l=0}^{\infty} z^l f_l(s).$$

Dabei ist

$$f_0(s) = a_{00}; \qquad f_1(s) = a_{10} s + a_{01}.$$

Die Normierungsbedingungen für die drei Probleme lauten:

$$N^1: \quad f_0(s) = 0; \quad f_1(s) = s.$$
$$N^2: \quad f_0(s) = 0; \quad f_1(s) = 1.$$
$$N^3: \quad f_0(s) = 1.$$

[11]) Näheres über diese Darstellung der Kreiskörpersektoren in der in Anm. [1]) angeführten Arbeit von Behnke.

Wir setzen nun nach Bergmann das Dirichletsche Integral (2) an.

$$\int_{\mathfrak{S}} f\bar{f}\, d\omega_{w,z} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{S}_n} f\bar{f}\, d\omega_{w,z}.$$

$\mathfrak{S}_n$ sei das Gebiet:

$$d \leqq |z| \leqq \theta_n R(s) \quad \text{für} \quad |s| \leqq 1.$$

Dabei ist $0 < \theta_n < 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 1$

$$\int_{\mathfrak{S}} f\bar{f}\, d\omega_{w,z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{ll'} \int_{|s|\leqq 1} \int_{d\leqq|z|\leqq\theta_n R(s)} z^{l+1}\bar{z}^{l'+1}\, dz\, d\bar{z}\, f_l(s)\overline{f_{l'}(s)}\, ds\, d\bar{s}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2\pi}{2l+4} \int_{|s|\leqq 1} \{R(s)^{2l+4} - d^{2l+4}\} f_l(s)\overline{f_l(s)}\, ds\, d\bar{s}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2\pi}{2l+4} \int_{|s|\leqq 1} \{R(s)^{2l+4} - d^{2l+4}\} f_l(s)\overline{f_l(s)}\, ds\, d\bar{s}.$$

Da $R(s) \geqq d$, ist der Integrand immer positiv, also jeder Summand positiv.

Die Summe wird am kleinsten, wenn ich alle $f_l(s) \equiv 0$ setze, soweit es die Normierungsbedingungen erlauben.

So erhalten wir

$$u^1 \equiv z\, s = w; \quad u^2 \equiv z \quad \text{und} \quad u^3 \equiv 1.$$

Die Minimumaufgabe für $\mathfrak{T}$ lösen wir genau so; wir brauchen nur an Stelle der Variablen s die Variable $t = \frac{z}{w}$ zu wählen. Die Lösungen sind die gleichen.

Die Funktionen

$$u^1 \equiv w, \quad u^2 \equiv z \quad \text{und} \quad u^3 \equiv 1$$

sind auch Lösungen des Minimalproblems für ganz $\mathfrak{R}$.

Denn es ist

$$\int_{\mathfrak{R}} f\bar{f}\, d\omega_{w,z} = \int_{\mathfrak{D}} + \int_{\mathfrak{S}} + \int_{\mathfrak{Z}}.$$

Jedes Integral ist positiv und die obigen Funktionen liefern das Minimum für jedes der drei Teilintegrale.

Satz 5. *Die einzigen mittelpunktstreuen Abbildungen eines Kreiskörpers auf einen anderen sind die affinen Transformationen.*

Aus Satz 4 folgt zunächst, daß Kreiskörper nicht normiert aufeinander abbildbar sind (siehe Schluß von § 1).

Nicht normierte Abbildungen kann man aber durch Zwischenschalten von ganzen linearen Transformationen in normierte verwandeln. Selbstverständlich führen die affinen Transformationen einen Kreiskörper in einen Kreiskörper über.

§ 3.

Über die Abbildung von Hartogsschen Bereichen.

Jeder Hartogssche Bereich $\mathfrak{H}$ läßt sich in der Form $z = R(w)$ darstellen. Mit $\mathfrak{B}_w$ will ich das einfach zusammenhängende Gebiet der w-Ebene bezeichnen, das durch die Gesamtheit der w-Koordinaten des Hartogsschen Bereichs gegeben wird, d. h. also die Projektion von $\mathfrak{H}$ auf die w-Ebene.

Geben wir zunächst eine geeignete Reihenentwicklung einer in einem gegebenen Hartogsschen Bereich $\mathfrak{H}$ regulären Funktion an.

Satz 5. *Ist $f(w, z)$ in dem gegebenen Hartogsschen Bereich $\mathfrak{H}$ regulär, so läßt es sich durch eine in jedem inneren Teilbereich von $\mathfrak{H}$ gleichmäßig konvergente Reihe*

$$f(w, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} f_{\nu}(w) \tag{7}$$

— $f_{\nu}(w)$ regulär in $\mathfrak{B}_w$ — darstellen[12]).

Mit Hilfe dieser Darstellung können wir jetzt nähere Aussagen über die Minimalfunktionen in Satz 1 machen.

Satz 6. *Die Minimalfunktionen in Satz 1 sind bei einem Hartogsschen Bereich von der Form*

$$u^1 = u_1(w); \quad u^2 = u_2(w) \quad \text{und} \quad u^3 = u_3(w).$$

Es ist

$$\int_{\mathfrak{H}} f(w, z)\, \overline{f(w, z)}\, d\omega_{w,z} = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathfrak{H}_n} f \cdot \bar{f}\, d\omega_{w,z},$$

wo $\mathfrak{H}_n$ der Bereich: $z = \theta_n R(w)$ mit $0 < \theta_n < 1$ und $\lim_{n \to \infty} \theta_n = 1$ ist. Unter Anwendung von Satz 5 ergibt sich, da man in $\mathfrak{H}_n$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (7) Summation und Integration vertauschen kann,

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{n n'} \int_{\mathfrak{B}_w} \int_{|z| = R(w)} z^n \cdot \bar{z}^{n'}\, dz\, d\bar{z} \cdot f_n(w)\, \overline{f_{n'}(w)}\, dw\, d\bar{w},$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{2l+2} \int_{\mathfrak{B}_w} R^{2n+2}(w)\, f_n(w)\, \overline{f_n(w)}\, dw\, d\bar{w}.$$

Die einzelnen Summanden sind positiv. Wir erhalten den kleinsten Wert für das Integral, falls wir möglichst viele $f_n(w) \equiv 0$ annehmen, soweit es die Normierungen erlauben.

Diese Normierungen lauten ja bei der Darstellung durch

$$\begin{aligned} N^1&: \quad f_0(0) = 0; \quad f_0'(0) = 1; \quad f_1(0) = 0. \\ N^2&: \quad f_0(0) = 0; \quad f_0'(0) = 0; \quad f_1(0) = 1. \\ N^3&: \quad f_0(0) = 1. \end{aligned}$$

[12]) Zum Beweis siehe die in Anm. [6]) angeführte Arbeit von Hartogs, S. 27, § 6.

So finden wir:

u^1 ist eine reine Funktion von w und zwar die Funktion, die

$$\int_{\mathfrak{B}_w} R^2(w) f(w) \overline{f(w)}\, dw\, d\bar{w}$$

zum Minimum macht, wo für $f(w)$ alle die Funktionen zur Konkurrenz zugelassen sind, die in $\mathfrak{B}_w$ regulär sind und den Nebenbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ genügen.

Ebenso ergibt sich $f(0) = 1$, wo u^2 die Lösung von

$$\int_{\mathfrak{B}_w} R^4(w) f \cdot \bar{f}\, dw\, d\bar{w} = \text{Min.}$$

mit der Nebenbedingung $f(0) = 1$ ist, und $u^3 = u_3(w)$ als Lösung von

$$\int_{\mathfrak{B}_w} R^2(w) f \bar{f}\, dw\, d\bar{w} = \text{Min.}$$

mit $f(0) = 1$.

Aus der speziellen Form der Minimalfunktionen eines Hartogsschen Bereichs folgt jetzt:

Satz 7. *Wenn ein Hartogsscher Bereich $\mathfrak{H}_1$ auf einen anderen $\mathfrak{H}_2$ normiert so abgebildet wird, daß der Nullpunkt innerer Punkt und Punkt der Symmetrieebene von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ ist, so ist die Abbildung von der Form*

$$L: \quad \begin{aligned} w' &= g(w), \\ z' &= z \cdot h(w). \end{aligned}$$

Jede eineindeutige Transformation L bildet einen Hartogsschen Bereich auf einen Hartogsschen Bereich ab.

Es sei

$$\begin{aligned} w' &= g_1(w, z), \\ z' &= g_2(w, z) \end{aligned}$$

eine solche normierte Abbildung von $\mathfrak{H}_1$ auf $\mathfrak{H}_2$. Die Funktion $\tilde{w}(w, z)$ in Satz 2, die zum Bereich $\mathfrak{H}_1$ gehört, ist nach Satz 6 unabhängig von z'.

$$\tilde{w}_{\mathfrak{H}_1} = \frac{u^1_{\mathfrak{H}_1}(w')}{u^3_{\mathfrak{H}_1}(w')} = \tilde{w}(w').$$

Entsprechend ist

$$\tilde{w}_{\mathfrak{H}_2} = \frac{u^1_{\mathfrak{H}_2}(w)}{u^3_{\mathfrak{H}_2}(w)} = \tilde{w}(w)$$

unabhängig von z.

Da nach Satz 2 $\tilde{w}$ kovariant gegen normierte Abbildungen ist, folgt

$$\tilde{w}_{\mathfrak{H}_1}(g_1(w, z)) = \tilde{w}_{\mathfrak{H}_2}(w)$$

und daher

$$\frac{\partial g_1}{\partial z} \equiv 0, \quad \text{d. h.} \quad w' = g(w).$$

Aus der Kovarianz von

$$\tilde{z} = \frac{z \cdot u_2(w)}{u_3(w)} = \tilde{z} \cdot \tilde{h}(w)$$

folgt dann ebenso

$$g_2(w, z) \equiv z \cdot h(w).$$

Die Umkehrung beweist man leicht, wenn man in die Darstellung $|z| = R(w)$ von $\mathfrak{H}$ die Transformation L einsetzt.

Satz 8. *Wenn ein Hartogsscher Bereich $\mathfrak{H}$ normiert auf einen Kreiskörper $\mathfrak{K}$ abbildbar ist, so ist $\mathfrak{K}$ ein Reinhardtscher Kreiskörper.*

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{\mathfrak{H}} &= \tilde{g}(w), \\ \tilde{z}_{\mathfrak{H}} &= z \cdot \tilde{h}(w) \end{aligned} \tag{8}$$

sei das $\mathfrak{H}$ zugeordnete Funktionenpaar $(\tilde{w}, \tilde{z})$, dessen spezielle Form wir ja im vorigen Satze fanden.

Nach Satz 4 ist ein Kreiskörper ein Repräsentantenreich, also

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{\mathfrak{K}} &= w', \\ \tilde{z}_{\mathfrak{K}} &= z'. \end{aligned} \tag{9}$$

Nach § 1 Schluß folgt:

(8) ist die Repräsentantenabbildung von $\mathfrak{H}$, also die Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{K}$.

— Die nötigen Voraussetzungen sind erfüllt, da es in der zu $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ gehörigen Abbildungsklasse ein eineindeutiges Abbildungspaar (w, z) gibt, nämlich (9). —

Die Abbildung (8) ist aber von der Form L, bildet also nach Satz 8 $\mathfrak{H}$ auf einen Hartogsschen Bereich $\mathfrak{H}_1$ ab.

$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{K}$ muß also zugleich Kreiskörper und Hartogsscher Bereich sein. Diese Eigenschaft haben aber nur die Reinhardtschen Kreiskörper.

Satz 9. *Wenn ein Kreiskörper auf einen Hartogsschen Bereich so abgebildet wird, daß der Mittelpunkt in einen Punkt der Symmetrieebene des Hartogsschen Bereichs übergeht, so ist der Kreiskörper ein affines Bild eines Reinhardtschen Kreiskörpers.*

Der Beweis folgt direkt aus Satz 7, wenn man bedenkt, daß man jede Transformation durch Einschalten von ganzen linearen Transformationen in eine normierte Transformation überführen kann.

Man könnte nun annehmen, jeder Hartogssche Bereich sei auf einen Reinhardtschen Kreiskörper auf die angegebene Weise abbildbar. Das ist aber nicht der Fall. Um das einzusehen, wollen wir zunächst die Abbildungen von Hartogsschen Bereichen auf Reinhardtsche Kreiskörper durch normierte Transformationen L näher untersuchen. Durch die Transformationen

$$L_1: \quad \begin{aligned} w' &= g(w), \\ z' &= z \end{aligned}$$

wird der Bereich $\mathfrak{B}_w$ auf einen anderen $\mathfrak{B}_{w'}$ abgebildet. Das Gebiet $\mathfrak{B}_w$ eines Reinhardtschen Kreiskörpers $\mathfrak{R}$ ist ein Kreis. Wenn also $\mathfrak{H}$ auf einen Reinhardtschen Kreiskörper abgebildet werden soll, so muß $\mathfrak{B}_w$ zunächst durch Transformation L_1 in einen Kreis übergeführt werden. In L ist also eine Transformation L_1 enthalten. Die Funktion $g(w)$ von L_1 ist die nach dem Riemannschen Abbildungssatz eindeutig bestimmte Kreisabbildungsfunktion $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$. Sie bildet $\mathfrak{H}$ auf einen Bereich $\mathfrak{H}_{\mathfrak{K}}$ ab, dessen $\mathfrak{B}_w$ ein Kreis $\mathfrak{K}$ ist. Die Transformationen, die $\mathfrak{H}_{\mathfrak{K}}$ normiert auf einen Bereich $\mathfrak{R}$ abbilden, müssen jetzt von der Form

$$L_2: \quad \begin{aligned} w' &= w, \\ z' &= z \cdot h(w) \end{aligned}$$

sein.

Nach dieser Zerlegung der Transformationen L in $L_1 \cdot L_2$ kann ich leicht beweisen:

Satz 10. *Es gibt Hartogssche Bereiche* $\mathfrak{H}^*$: $|z| = R^*(w)$, *die sich normiert nicht auf Reinhardtsche Kreiskörper* $\mathfrak{R}$: $|z| = R(|w|)$ *abbilden lassen.*

Nach den obigen Ausführungen kann ich annehmen, $\mathfrak{B}_w$ ist ein Kreis $\mathfrak{K}$. Dann kann die Abbildung nur die Form L_2 haben.

Ich betrachte nur solche Bereiche $\mathfrak{H}$, deren $R(w)$ in ganz $\mathfrak{K}$ dreimal differentiierbar ist. Dann ist

$$A(w) = \Delta_w \ln R(w)$$

eine in ganz $\mathfrak{K}$ differentiierbare Funktion, die invariant gegen L_2 ist.

Wenn wir Polarkoordinaten $w = re^{i\varphi}$ einführen, so schreibt sich ein Reinhardtscher Kreiskörper in der Form

$$|z| = R(r). \tag{10}$$

Es ist $\frac{\partial}{\partial \varphi} R(w) \equiv 0$. In (r, φ) Koordinaten ist

$$A(w) = \frac{\partial^2 \ln R(w)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \ln R(w) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \ln R(w).$$

Falls $\frac{\partial}{\partial \varphi} A(w) \not\equiv 0$, so ist auch $\frac{\partial}{\partial \varphi} R(w) \not\equiv 0$, also $R(w)$ kein Reinhardtscher Kreiskörper. Da als $R(w)$ jede beliebige in $\mathfrak{K}$ dreimal differentiierbare positive Funktion $R(u, v)$ gewählt werden kann, so kann man leicht Hartogssche Bereiche finden, deren $A(w)$ unabhängig von φ ist. Solche Bereiche seien mit $\mathfrak{H}^*$: $|z| = R^*(w)$ bezeichnet. Die Bereiche $\mathfrak{H}^*$ sind aber sicher nicht durch L_2 auf Reinhardtsche Kreiskörper abbildbar. Denn da $A(w)$ invariant gegen L_2 ist, gilt für jeden durch L_2 abgebildeten Bereich von $\mathfrak{H}^*$, daß $\frac{\partial}{\partial \varphi} A(w) \not\equiv 0$ ist.

Satz 11. *Nicht alle Hartogsschen Bereiche sind so auf Reinhardtsche Kreiskörper abbildbar, daß ein Punkt der Symmetrieebene des Hartogsschen Bereichs in den Mittelpunkt des Kreiskörpers übergeht.*

Gebe ich die Normierung der Abbildungen auf, so könnten die Bereiche $\mathfrak{H}$ nur durch die Transformationen

$$w' = \frac{w - \alpha}{\bar{\alpha} w - 1} \qquad (|\alpha| < 1),$$
$$z' = z$$

auf die im Satz geforderte Weise auf Reinhardtsche Kreiskörper abgebildet werden. (Ich kann jetzt annehmen, $\mathfrak{K}$ sei der Einheitskreis.) Wenn man unter den $R^*(w)$ nur solche auswählt, für die

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta_w \ln R^*\left(\frac{w - \alpha}{\bar{\alpha} w - 1}\right) \not\equiv 0$$

für alle $|\alpha| < 1$ ist, was man sicher erreichen kann, so haben diese Bereiche die im Satz geforderte Eigenschaft.

Satz 12. *Nicht alle Hartogsschen Bereiche sind auf Kreiskörper $\mathfrak{K}$ so abbildbar, daß ein Punkt der Symmetrieebene von $\mathfrak{H}$ in den Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ übergeht.*

Der Beweis folgt direkt aus den Sätzen 9 und 11.

(Eingegangen am 14. 12. 1929.)

Lebenslauf

Am 21. November 1905 wurde ich als Sohn des Regierungslandmessers Karl Welke zu Bünde (Westfalen) geboren. An der Bessel-Oberrealschule zu Minden bestand ich zu Ostern 1925 die Reifeprüfung. Dann studierte ich Mathematik, Physik und Chemie in Göttingen und Münster. Herrn Professor Behnke habe ich für die Anregung zu dieser Arbeit und viele Ratschläge bei der Abfassung derselben zu danken.